Viro Celeberrimo

Leonhardo Eulero

S. P. D.

Nicolaus Bernoulli.

Ignosce quæso quod nondum respondi ad ultimas Tuas litteras ante annum et quod excurrit scriptas. Repeto excusationem jam aliquoties à me allatam, cui et hoc addere debeo, quod per longam desuetudinem ita hebes factus sim, ut vix quicquam proficiam, quando te in profundis Tuis meditationibus sequi volo. Ne autem diutius in mora sim, postulat donum, quod mihi nuper D. Bousquet jussu Tuo misit, consistens in egregio tractatu Tuo de Isoperimetris, pro quo Tibi maximas ago gratias. Hunc librum avide sed obiter inspexi in plagulis adhuc solutis, attente autem perlegam postquam illum à compactore ligatum recepi. Tantum jam perspexi, ut non possim non Tibi impense gratulari et applaudere de inventa elegantissima et genuina methodo hoc Problema in latissimo sensu acceptum tractandi. Ego quoque olim observaveram, methodos ab aliis usurpatas in hoc deficere, quod restricta sint ad eam hypothesin, quæ supponit, minimam Curvæ particulam eadem qua integer arcus Maximi vel Minimi proprietate gaudere, quem defectum Tu optime supplevisti. Hac occasione te rogare audeo (quod tacitum apud me servabo) quid sentias de priori solutione directa Patrui mei, quæ extat in Commentariis Acad. Reg. A. 1706. Sane ea mihi videtur esse paralogistica, imo nulla. Casu incidit in solutionem veram Problematis 1. dum posuit dt constantem, quemadmodum etiam casu inventurus fuisset veram solutionem Problematis 2. si ibi non dt sed dx posuisset constantem. Analogiæ ad quas Probl. 1. et 2. reducit non sunt veræ proprietates Curvæ quæsitæ, sed quibusvis Curvis competunt, prout alia atque alia differentialis pro constanti adhibetur; vel potius nulli Curvæ competunt, quia hæ analogiæ dant æquationem ex terminis heterogeneis constantem. Deinde Taylorus recte objecit, inepte sumi angulos OFQ et OQF pro dimidio angulo Curvedinis in punctis F et Q. Praeterea ipsa hypothesis, per quam duo elementa FO+OQ, et duo elementa Fω+ωQ ponuntur Isoperimetra, deducere videtur ad absurditates, ita ut non possit consistere cum inaequalitate seu variabilitate angulorum OFI et ωFI; mihi enim ex conditione Isoperimetri sequi videtur rationem FI ad OI, sive angulum OFI fore constantem, contra hypothesin, quae supponit angulum OFI mutari posse in angulum ωFI. Altera Taylorii solutio, ut et Hermanniana, quae ambae exstant in Actis Lips. A. 1718. quoad fundamentum et methodum conveniunt cum Fratris Jacobi solutione, nec ab ea differunt nisi quod in illis prolixus Jacobi calculus eleganti compendio concinnior redditus fuerit. Caeterum doleo Jacobum à Fratre nimis inique notatum fuisse, quod plures absurditates et contradictiones in solutione sua admiserit, cum tamen omnia quae Jacobus dixit sano sensu explicari, et apparentes contradictiones conciliari queant. Ex. gr. cum dixit, in omnibus aequationibus Tabulae suae literas p et q augeri minuive posse quantitate quacunque constante c, id intelligendum est de Maximis vel Min. $\int pdy$, $\int pdt$, $\int qdy$, &c. in quibus p vel q significant ipsas ordinatas Curvarum, quarum areae debent esse vel Max. vel Min. non vero de Maximis vel Min. $\int \frac{dy}{p}$, $\int \frac{dt}{p}$, $\int \frac{dy}{q}$, &c. cum enim illa transeant in haec ponendo $\frac{aa}{p}$ vel $\frac{aa}{q}$ pro p vel q, patet in his non p vel q, sed $\frac{1}{p}$ aut $\frac{1}{q}$ posse augeri vel minui quantitate constante c. Neque etiam eadem assertio ita accipi debet, ac si aequationes quae Maximum aliquod vel Minim. suppeditant, post talem mutationem semper etiam Maxim. vel Minim. respective praebere debeant; possunt enim per talem mutationem Maxima degenerare in Minima, et vice versa; quamvis ipse Jacobus, sicut ejus Frater, ex inadvertentia hoc non observaverit. Ex. gr. quamvis aequatio $dy = \frac{pdx}{\sqrt{aa-pp}}$ praebeat Maximum $\int pdy$, attamen haec aequatio $dy = \frac{pdx-cdx}{\sqrt{aa-\overline{p-c}^2}}$ potest praebere et Maximum $\int pdy$, et Minimum $\int pdy$, prout p major est vel minor quam c. Sic quoque aequatio $dy = \frac{adx}{\sqrt{bb-2bp+pp-aa}}$ potest dare Maximum $\int pdt$, etiamsi crescente x decrescat p, quicquid contradicat Johannes, quoties cunque nempe $b-p$ est quantitas affirmativa. Ita etiam, quamvis aequatio $dy = \frac{qdt}{\sqrt{aa+qq}}$ satisfaciat Maximo $\int qdy$, tamen aequatio generalior $\frac{qdt \pm cdt}{\sqrt{aa+qq\pm 2cq+cc}} = dy$ potest dare et Maxim. et Min. $\int qdy$, illud nempe si $q\pm c$ fuerit quantitas affirmativa, hoc si $q\pm c$ fuerit quantitas negativa. Ad has praedictas tres aequationes generales, quae exhibent Maxima vel Minima

P. S. d. 1. Maji 1745. Postquam misi nuperam epistolam, cupido me incessit examinandi solutionem Tuam Problematis de filo tribus corpusculis onusto. Scribis Te ex theoria motus elicuisse has aequationes $dt = ds\sqrt{\frac{4-(\cos.s)^2}{2\alpha-\beta+\alpha\cos s}}$ et $dr = \beta ds\sqrt{\frac{2-\cos s}{(2+\cos s)\ldots\ldots}}$, reliqua in denominatore, quae à sigillo epistolae Tuae obtecta sunt, non possum legere. Mihi videtur has duas aequationes ita constituendas esse $dt = ds\sqrt{\frac{4-(\cos s)^2}{2\alpha-\beta\beta+\alpha\cos s}}$, et $dr = \beta ds\sqrt{\frac{2-\cos s}{(2+\cos s)(2\alpha-\beta\beta+\alpha\cos s)}}$, ut sit $\alpha = \frac{dr^2}{dt^2}(2+\cos s)+\frac{ds^2}{dt^2}(2-\cos s)$, et $\beta = \frac{dr}{dt}(2+\cos s)$.

60v

Per inadvertentiam ex schedis meis, ubi aliis litteris usus fueram, exscripsi

$$dr = \beta\, ds \sqrt{\frac{2-\cos s}{(2+\cos s)(2\alpha-\beta+\alpha\cos s)}}$$

cum ponere debuissem.

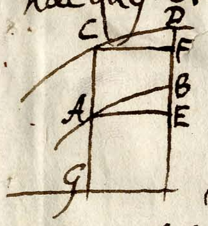
$$dr = ds\sqrt{\frac{(2-\cos s)\beta}{(2+\cos s)(2\alpha-\beta+\alpha\cos s)}}$$

quae expressio cum Viri Celeb. formula exacte congruit, dummodo pro $\beta\beta$ ponatur β.

Spdy, Spdt, Sqdy, Patruus meus Jacobus potuisset reducere omnes 11. aequationes Tabulae suae. Sed satis de his. Attingam nunc pauca quaedam ex Tua ultima epistola: Gaudeo Te nunc mihi assentire circa ea quae dixeram de seriebus divergentibus. Gratum facies si mihi indicabis ipsam formulam quantitatis transcendentis $= 0.40478$, ex cujus evolutione oritur series $1-2+6-24+120-720+$ &c. Iste modus concipiendi seriem divergentem, tanquam ortam ex evolutione quantitatis alicujus finitae, nil quicquam habet absurdi, ut contra eum aliquid objici possit; et si vel maxime eadem series ex pluribus diversis expressionibus finitis oriri posset, hinc non sequeretur ejusmodi concipiendi modum esse absurdum; sed hoc sequeretur, ejusmodi expressiones non posse appellari summam seu valorem seriei divergentis, et hoc magis confirmaret sententiam meam, qua statuo, seriem divergentem nullum habere valorem.

Ego vicissim Tibi assentior in eo quod attinet ad integrationem aequationis $PRdx + QRdy = 0$. Si paulo attentius considerassem ea quae in penultima epistola ipse scripsi, non amplius dubitassem, sed facile vidissem, demonstrationem ibi a me allatam inverti posse. Verum quia aliquis haerere posset in sumtione integralis quantitatis $PRdx$ in casu $x = 0$, mallem ego hunc modum integrationis praescribere.

Sit S nota integrationis, quando y ponitur constans, et σ nota integrationis, quando x ponitur constans. distinguatur $PRdx$ in membra in quibus y non reperitur, et in ea in quibus y reperitur; vocentur illa Xdx, haec pdx. Pariter distinguatur $QRdy$ in membra in quibus x non reperitur, et in ea in quibus x reperitur; vocentur illa Ydy, haec qdy. Erit itaque $\int PRdx + \int QRdy = \int Xdx + \int Ydy + Spdx = \int Xdx + \int Ydy + \sigma qdy =$ constanti.



quod autem sit $Spdx = \sigma qdy$, sic facile demonstro: Sit $AE = CF = dx$, $BE = pdx$ posita y ~~et dy~~ constante, per consequens $AG = Spdx$. Sit $AC = FE =$ diff. AG posita x constante; diff. AC positis y et dy constantibus $= DB - AC = DB - FE = DF - BE =$ diff. BE seu diff. pdx positis x et dx constantibus. Sed per hypothesin est quantitas R ita comparata, ut diff. pdx positis x et dx const. debeat esse $=$ diff. qdy positis y et dy constantibus, ergo $AC = qdy$, per consequens $\sigma qdy = AG = Spdx$.

Ad ea quae dixisti de radicibus imaginariis nihil habeo quod reponam, nisi quod existimem, ideam quantitatis imaginariae sive impossibilis involvere ideam radicis quadratae quantitatis negativae, quia eae quantitates sunt impossibiles, quae neque affirmativae esse possunt, neque negativae, quarumque quadrata aut ipsa sunt impossibilia, aut saltem negativa.

Problemata quae in fine subjunxisti de projecta Catena vel filo 3 corpusculis onusto nimis difficilia mihi visa sunt. Malo fundamentum solutionis ex Te discere, quam

67v

quam ingeniolum meum hebetabunt eorundem examine diu torquere.
Quod superest Deum O. M. rogo, ut luctum ex B. Parentis Tui obitu conceptum minuat,
Teque cum Tuis quam optime valere jubeat. Dabam Basileae d. 20. Apr. 1745.

à Monsieur

Monsieur Euler Professeur
Royal &c. &c.
fo. frfort: à Berlin.